

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΑΓΜ. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

cpalask@cc.uoi.gr

Ημέρες Γραφείου: Δευτέρα-Τρίτη-Τετάρτη

Σύζη

Είναι ένα σύνολο G εφοδιασμένο με δυο πράξεις $(G, +, \cdot)$ για τις οποίες ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

1) $(G, +)$ αποτελεί αβελιανή ομάδα

2) Ο πολλαπλασιασμός $\cdot$ είναι προσεταιριστική.

3) Υπάρχει ουδέτερο στοιχείο για τον $\cdot$.

4) Για κάθε $a \in G$ υπάρχει πολλαπλός $(\cdot)$ αντιστροφός a'
 $a \cdot a' = e = a' \cdot a$

5) Ισχύει η ^{αριστερή και δεξιά} επιμεριστική ιδιότητα $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
 $(\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$

Στο $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ είναι σωστά.

→ Ενεκζείνω στο $\mathbb{R}$ προσαρτώντας δύο ακόμη στοιχεία

$$\pm \infty, -\infty : \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

Ορίσω διέκταση στο $\mathbb{R}^*$: $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $-\infty < x < +\infty$

Επιπλέον, θεωρώ ότι: 1) $x + (\pm \infty) = (\pm \infty) + x = \pm \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$2) (\pm \infty) + (\pm \infty) = \pm \infty$$

$$3) x \cdot (\pm \infty) = \begin{cases} \pm \infty & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \mp \infty & x < 0 \end{cases}$$

$$4) (\pm \infty) \cdot (\pm \infty) = +\infty$$

$$5) (\pm \infty) \cdot (\mp \infty) = -\infty$$

Θεωρούμε επίσης, ότι δεν ορίζονται οι εξής πράξεις:

$$(+\infty) + (-\infty) \quad \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$$

Στο σύνολο $\mathbb{R}$ εφοδιασμένο με τις πράξεις $+$, $\cdot$ δεν είναι σωστά. (μη. δεν ισχύει η κλειστότητα ως προς $+$)

Επίσης, δεν ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα με το $\pm \infty$
 $(\pm \infty) \cdot (x + y) \neq (\pm \infty) \cdot x + (\pm \infty) \cdot y$

- A : Ένα σύνολο στο $\mathbb{R}$ υποβλήθηκε σε A' το απλό σύνολο
- στο $\mathbb{R}^*$ έχουμε το γενικευμένο απλό σύνολο A''
- Εάν το A είναι ένα φραγμένο σύνολο στο $\mathbb{R}$, τότε το $A' \equiv A''$
- Εάν A δεν είναι ένα φραγμένο τότε $+\infty \in A''$
- Εάν A δεν είναι κάτω φραγμένο τότε $-\infty \in A''$

<u>Παλ</u>	<u>Παλ</u>	<u>Παλ</u>	<u>Παλ</u>
$A = \mathbb{N}$	εν $A = \{0\}$	εν $A = (0, 1)$	$A = (0, +\infty)$
$A' = \emptyset$	$A' = A'' = \emptyset$	$A' = A'' = [0, 1]$	$A' = [0, +\infty)$
$A'' = \{+\infty\}$			$A'' = [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$

Ορισμός

Για κάθε $y \in \mathbb{R}^*$ και $\delta > 0$ ορίζεται τα εξής σύνολα:

- Για $y \in \mathbb{R} \Rightarrow B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta\}$
- Για $y = +\infty \Rightarrow B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x > \frac{1}{\delta}\}$
- Για $y = -\infty \Rightarrow B(y, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\frac{1}{\delta}\}$

Ενώ $B_0(y, \delta) = B(y, \delta) \setminus \{y\}$

Ορισμός

Αν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση και $y \in A''$ λέγεται ότι f συνverges $L \in \mathbb{R}^*$ αν ισχύει: $(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow f(x) \in B(L, \epsilon)$

- Αποδεικνύεται ότι αν το όριο της f στο $y \in A''$ υπάρχει, τότε είναι μοναδικό (ΑΣΚΗΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΕΥΤΕΡΑ)
- Λόγω της μοναδικότητας του ορίου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνολο αν ως υποβλήσεις:

$$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L \quad \text{ή} \quad \lim_{y \in A''} f$$

Πρόταση

Το $\lim_{x \rightarrow y} f(x) = L \Leftrightarrow \forall (x_n) \in A \setminus \{y\} \text{ με } \lim x_n = y \text{ ισχύει } \lim f(x_n) = L$

Πρόταση

Το $\lim f$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός αν-ν ισχύουν:
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : x_1, x_2 \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Απόδειξη

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι υπάρχει $\lim f = L \in \mathbb{R}$ τότε

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Έστω ένα $\varepsilon > 0$ τότε αν $x_1 \in B_0(y, \delta) \cap A$ έχουμε $|f(x_1) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

ενίσης $x_2 \in B_0(y, \delta) \cap A$ έχουμε $|f(x_2) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\text{οπότε } |f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - L| + |L - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \checkmark$$

$(\Leftarrow)$ Έστω $(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : x_1, x_2 \in B_0(y, \delta) \cap A \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

Θέλω ν.δ.ν. $\lim f$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$ αρκεί ν.δ.ν.

$\forall (x_n) \in A \setminus \{y\} \text{ με } \lim x_n = y \text{ το } \lim f(x_n) \text{ υπάρχει και}$

είναι μοναδικό με όλες τις αυτές τις ε.

Έστω $(x_n) \in A \setminus \{y\} \text{ με } \lim x_n = y$ τότε $(\forall \delta > 0) \exists n_0 : |x_n - y| < \delta \quad \forall n \geq n_0$

Έστω λοιπόν $n_1, n_2 \text{ με } n_1 > n_0 \text{ και } n_2 > n_0$ τότε

$$|x_{n_1} - y| < \delta \text{ και } |x_{n_2} - y| < \delta \quad (\text{δηλ. } x_{n_1}, x_{n_2} \in B_0(y, \delta))$$

τοτε δε έχουμε $|f(x_{n_1}) - f(x_{n_2})| < \varepsilon$ άρα $f(x_n)$ είναι ακολουθία

Cauchy στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς είναι συγκλίνουσα.

Άρα με κάθε $(x_n) \in A \setminus \{y\} \text{ με } \lim x_n = y$

το $\lim x_n$ υπάρχει και είναι πραγματικός.

Θα δείξουμε ότι με κάθε (x_n) το όριο της $f(x_n)$ είναι

μοναδικό. Έστω $(x_n) \in A \setminus \{y\}$ και $(y_n) \in A \setminus \{y\}$:

$\lim x_n = y$ και $\lim y_n = y$ και έστω $\lim f(x_n) = l_1$ και

$\lim f(y_n) = l_2$ ($l_1, l_2 \in \mathbb{R}$) τότε θεωρούμε $w_n = \begin{cases} x_n & \text{n. περιττός} \\ y_n & \text{n. άρτιος} \end{cases}$

έχουμε ότι $\lim w_n = y$

ενίσης, έστω $\lim f(w_n) = l_3$ τότε η $f(x_n)$ είναι

ακολουθία της $f(w_n)$ άρα $l_1 = l_3$

ενίσης, $f(y_n)$ είναι ακολουθία της $f(w_n)$ άρα

$l_2 = l_3$ άρα $l_1 = l_2$

Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και ένα σημείο $y \in A$.

Το ανώτερο όριο της f στο y ορίζεται ως

(συμβολισμός: $\limsup_{x \rightarrow y} f(x)$ ή $\overline{\lim}$)

επίσης: $\limsup_{x \rightarrow y} f(x) = \inf_{\delta > 0} \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \}$

(για τις ακολουθίες: $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf_{k \geq 0} \sup \{ a_n : n \geq k \}$)

ανώ το κατώτερο όριο της f στο y ορίζεται ως

(συμβολισμός $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ ή $\underline{\lim} f$)

επίσης: $\liminf_{x \rightarrow y} f(x) = \sup_{\delta > 0} \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \}$

(για τις ακολουθίες: $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{k \geq 0} \inf \{ a_n : n \geq k \}$)

~ Το $\liminf_{x \rightarrow y} f$ και το $\limsup_{x \rightarrow y} f$ υπάρχουν πάντα σε αντίθεση

με το όριο να μπορεί να μην υπάρχει

• $m = \inf A$ ($m \in \mathbb{R}$) αν -v i) $m \leq x \quad \forall x \in A$

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) : x < m + \varepsilon$

Εάν $A \subseteq B \Rightarrow$ το $\inf B \leq \inf A$

• $M = \sup A$ ($M \in \mathbb{R}$) $\Leftrightarrow$ i) $x \leq M$

ii) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A) : x > M - \varepsilon$

Απόδειξη

Θεωρούμε $\delta_1, \delta_2 > 0$ τότε θέτουμε $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$

$I_\delta = \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \} \leq \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} \leq$

$\leq \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} \leq \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \}$

οπότε $\inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \} \leq \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \}$

Για δοθέν δ_2 έχουμε: $\sup \inf \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_1) \cap A \} \leq$

$\leq \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \}$ έπει

$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \}$

Εφόσον το δ_2 είναι αυθαίρετο το $\liminf_{x \rightarrow y} f(x)$ θα είναι έμ

κάτω φραγμένο για το σύνολο $\{ \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta_2) \cap A \} : \delta_2 > 0 \}$

ελλή το $\inf$ είναι το μεγαλύτερο κάτω φραγμένο έπει

$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \inf_{\delta > 0} \{ \sup \{ f(x) : x \in B_0(y, \delta) \cap A \} \}$

$$\liminf_{x \rightarrow y} f(x) \leq \limsup_{x \rightarrow y} f(x)$$